درس : الجداء المتجهي

I. توجيه الفضاء – ثلاثي الأوجه – الأساس و المعلم الموجهان:

01. ثلاثي الأوجه : Trièdre

1. تعريف:

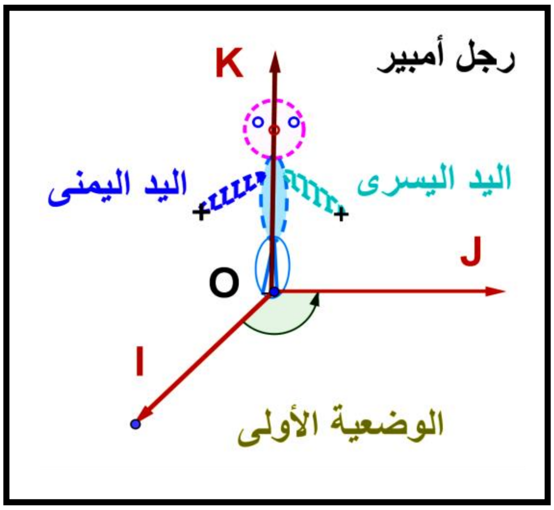
$[OI)$ و $[OJ)$ و $[OK)$ ثلاثة أنصاف مستقيمات غير مستوائية من الفضاء تكون في هذا الترتيب (الترتيب مهم) ثلاثي أوجه يرمز له باختصار (OI,OJ,OK) أما أنصاف المستقيمات تسمى أحرفه. ($[OI)$ حرف لثلاثي الأوجه).

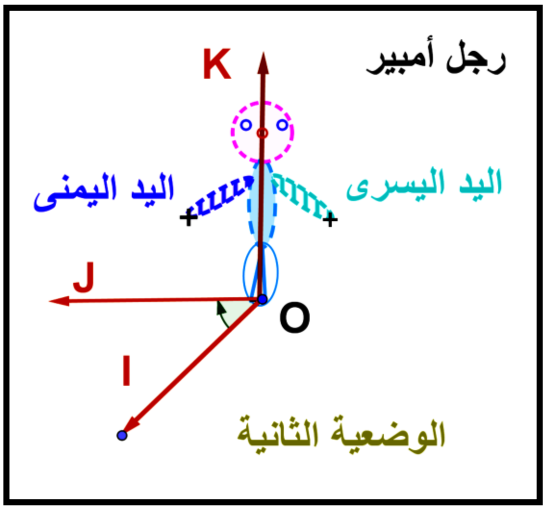
02. رجل أمبير:

1. تقديم:

(OI,OJ,OK) ثلاثي أوجه ؛ نفترض شخص خيالي حيث : قدماه في النقطة O ومحمول على الحرف الثالث $[OK)$.

- وينظر إلى الحرف الأول $[OI)$.
- نهتم هل يده اليسرى توافق منحى الحرف الثاني $[OJ)$.
- هذا الشخص يسمى رجل أمبير Bonhomme d'Ampère
هناك وضعيتين للحرف $[OJ)$. (أنظر الوضعية رقم 1 ثم رقم 2)





03. الأساس و المعلم الموجهان:

1. مفردات:

- الوضعية التي يكون رجل أمبير محمول على الحرف $[OK)$ و قدماه في O و ينظر إلى الحرف $[OI)$ و الحرف $[OJ)$ على يساره نسمى ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر أو موجب (هذه الوضعية التي تهمنا في هذا الدرس)
- الوضع الأخر لثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) غير مباشر أو سالب
- $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم في الفضاء نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ إذن ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير مستوائية) المثلوث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء .
  - الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر .
  - في هذه الحالة المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يسمى معلم مباشر و نقول أن الفضاء موجه توجيها مباشرا (أو موجبا)

II. الجداء المتجهي لمتجهتين من الفضاء – تأويل منظمه:

01. تعريف هندسي للجداء المتجهي :

درس : الجداء المتجهي

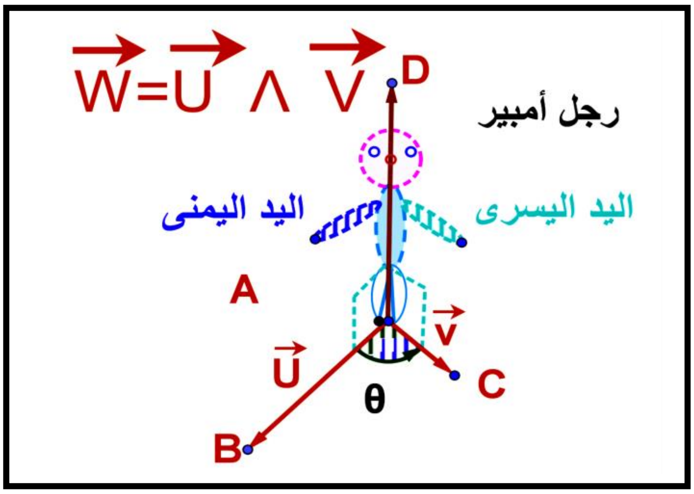
1. تعريف :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ متجهتين من الفضاء الموجه.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب (أي الترتيب مهم) هو المتجهة $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ و التي نرمز لها ب: $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ التي تحقق ما يلي.

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن: $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ تحقق
  - $\vec{w}$ متعامدة مع كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أي $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$)
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر . ($(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ أساس مباشر أو (AB,AC,AD) ثلاثي أوجه مباشر) .
  - $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس للزاوية الهندسية BAC .

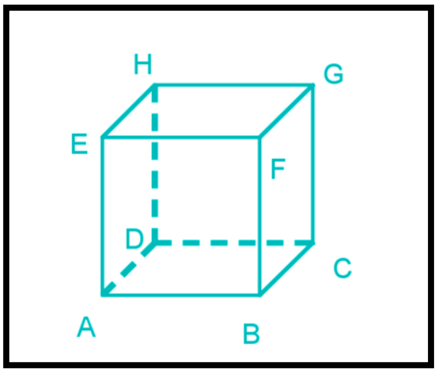
2. مثال 1 :



3. مثال 2 :

نضع : $\|\vec{u}\|=2$ و $\|\vec{v}\|=5$ و $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{6}$ أحسب : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

4. مثال 3 :



نعتبر المكعب : $ABCDEFGH$ حيث:

أ- $AB=1$. أوجد: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ ثم $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

ب- $AB=2$. أوجد: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ ثم $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

جواب:

أ- نجد :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ (لأنهما مستقيمتان) . $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=1\times1\times\overrightarrow{AE}$

ب- نجد :

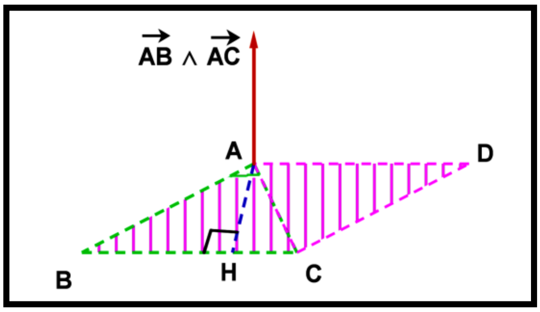
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ (لأنهما مستقيمتان) . $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=2\times2\times\overrightarrow{AE}$

5. نتائج:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء ، لدينا:

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ و $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ و $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين و متعامدتين $(\vec{u}\perp\vec{v})$ المثلوث: $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس متعامد مباشر.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين و متعامدتين $(\vec{u}\perp\vec{v})$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ المثلوث: $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس متعامد ممنظم مباشر.
- المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين الغير المستقيمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أي $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$) فإن المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منظمية على المستوى $\mathcal{P}$ ومنه: $\left(\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})=\mathcal{P}(A,\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v})\right)$.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان من الفضاء يكافئ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

02. تأويل ممنظم الجداء المتجهي لمتجهتين :



1. خاصية:

- مساحة مثلث ABC هي $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$.
- مساحة متوازي الأضلاع هي: $S_{ABCD} = \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$.

03. تخالفية و خطانية الجداء المتجهي في الفضاء:

1. خاصية:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k من $\mathbb{R}$ لدينا:

- التخالفية (Antisymétrie)

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

- خطانية: Bilinéarité

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \\ \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \left(k\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \end{cases}$$

III. إحداثيات الجداء المتجهي لمتجهتين بالنسبة لأساس م.م.م. مباشر.

1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى أساس م. م. مباشر $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء. لدينا:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}$$

2. مثال: تحقق بأن: $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

IV. مسافة نقطة عن مستقيم في الفضاء:

1. خاصية:

$D\left(A, \vec{u}\right)$ مستقيم المار من النقطة A من الفضاء و الموجه بمتجهة $\vec{u}$ (غير منعدمة) ، M نقطة من الفضاء؛ مسافة النقطة M عن المستقيم $D\left(A, \vec{u}\right)$ هي:

$$d\left(M; D\left(A, \vec{u}\right)\right) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$$

2. مثال:

أحسب مسافة النقطة $M(1,3,0)$ عن المستقيم (D) حيث:

أ - $(D):\begin{cases} x=2t \\ y=3-t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-1+t \end{cases}$

ب - $(D):\dfrac{x+1}{3}=y=\dfrac{1-z}{2}$

جواب:

أ - $D\left(A(0,3,-1),\vec{u}(2,-1,1)\right)$ إذن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ و $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1-0\\3-3\\0+1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ومنه: $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{3}$

إذن : $d\left(M;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب- $D\left(A(-1,0,1),\vec{u}(3,1,-2)\right)$ إذن $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ و $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1+1\\3-0\\0-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ إذن : $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{75}$.

وبالتالي: $d\left(M;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{1050}}{14}$